X射线衍射应力分析的$\sin^2\Psi$法

1961年德国学者马赫劳赫提出

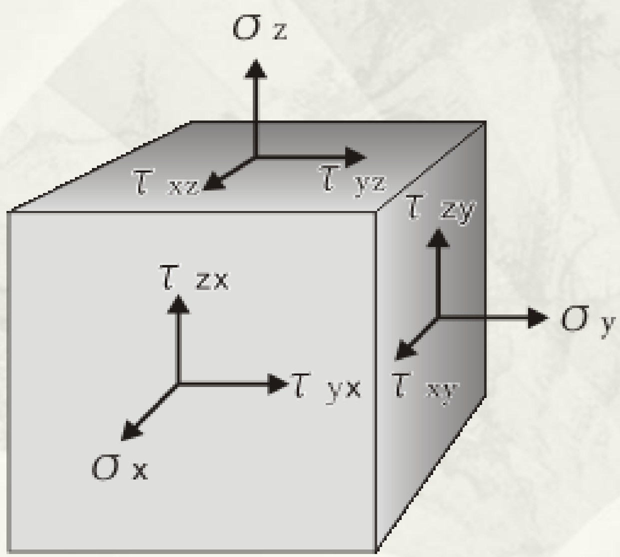
俄国学者阿克先诺夫1929年提出：把材料的宏观应变看成是晶格应变的结果。依据弹性力学可以建立应力与应变的关系式；晶格应变可以通过X射线衍射分析；这样就可以推导出应力σ和衍射角2θ的确定关系。

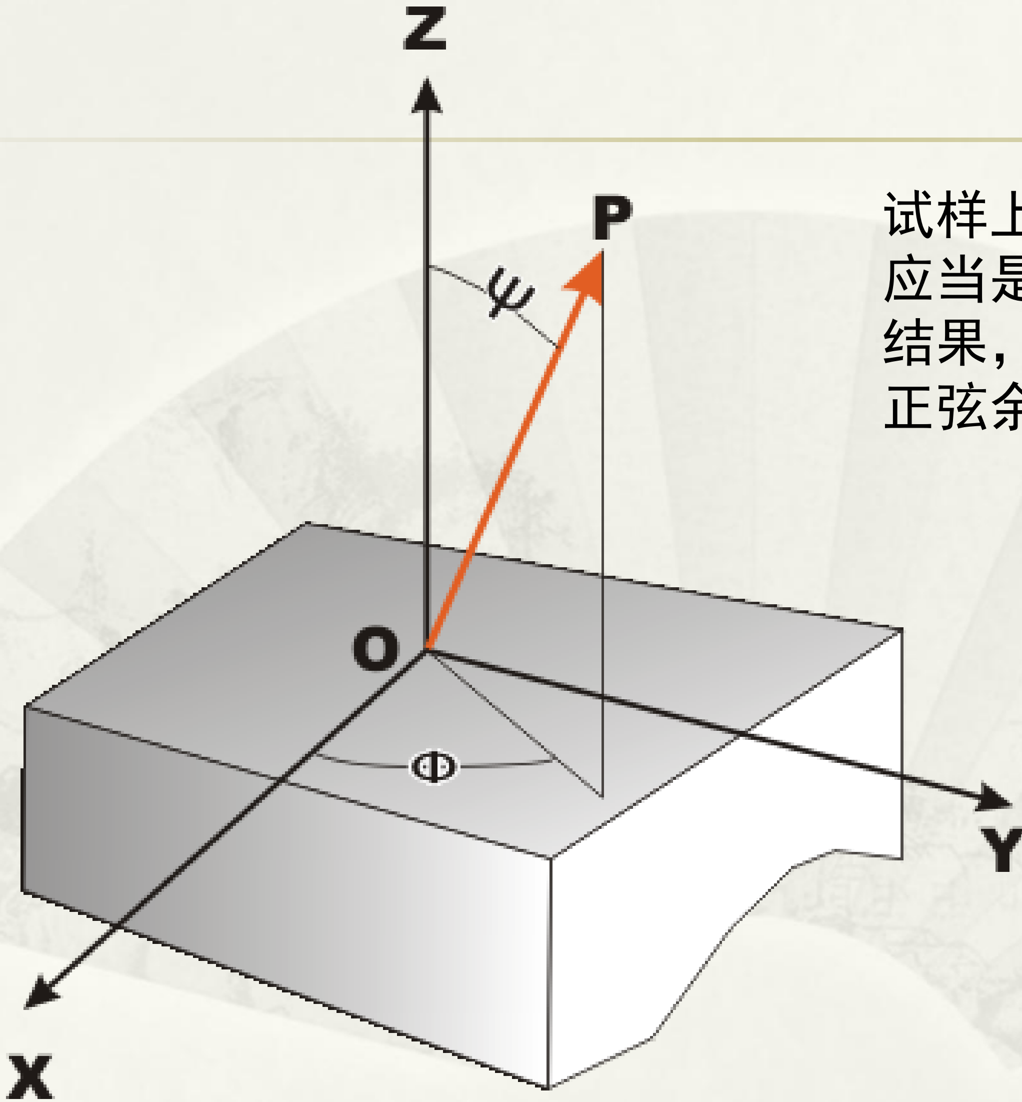
胡克定律：σ——ε

阿克先诺夫：ε——ε^J

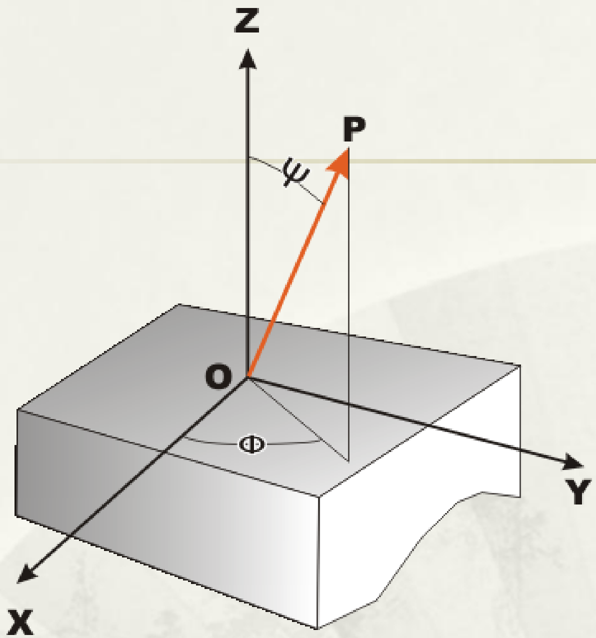
布拉格定律：2θ——d——Δd / d——ε^J

根据力学基础知识，为了描述材料中某一个点的受力状况，在正交坐标系中，把这个点看成一个小的立方体，用它的六个面上的正应力和切应力，构成一个应力张量。





试样上O点在OP方向上的应变应当是该点应力张量作用的结果，且与图中Φ角Ψ角的正弦余弦相关。



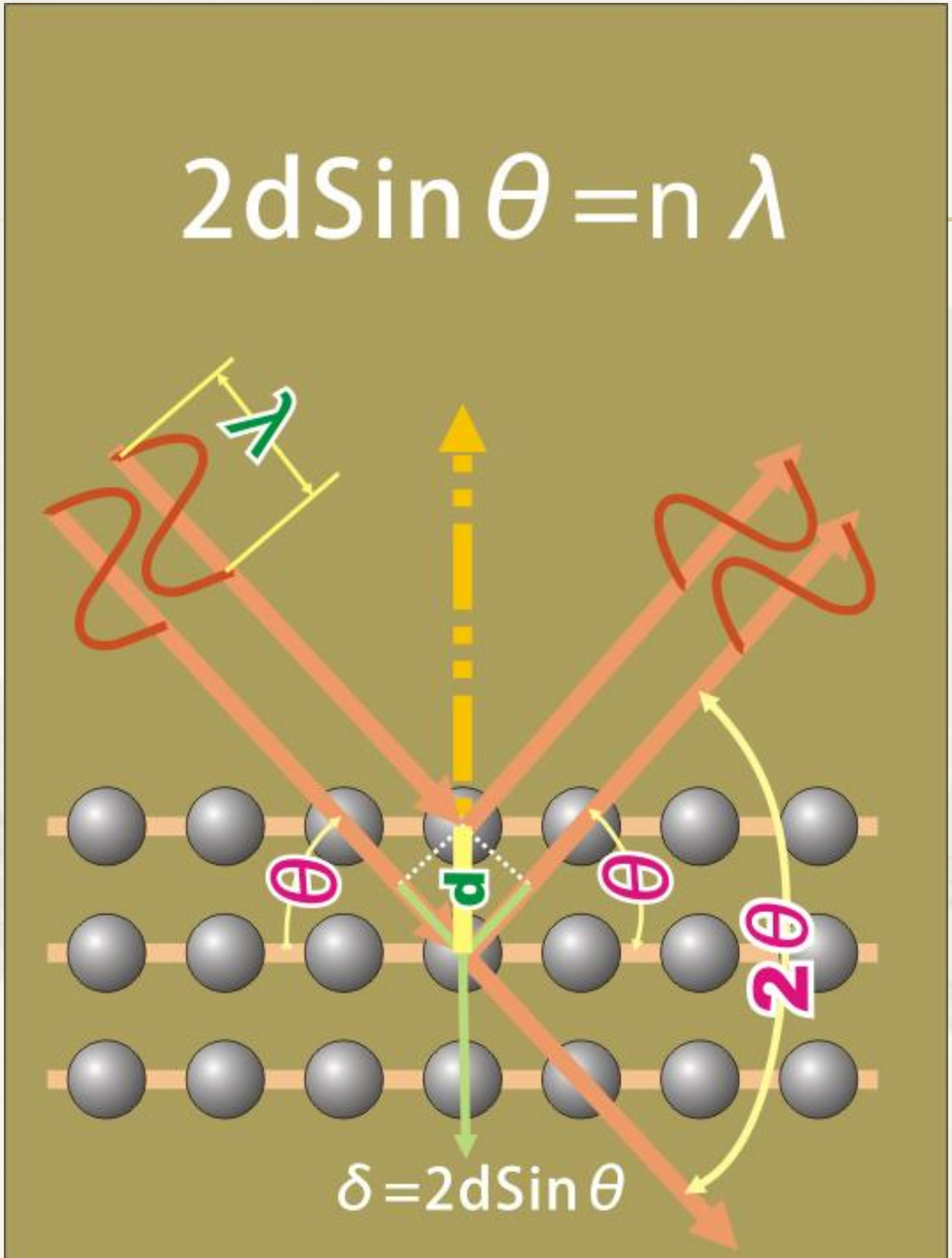
根据广义胡克定律，可推导出OP方向的宏观应变ε$_{\Phi\psi}$与各应力分量及Φ角Ψ角的关系：

$$\varepsilon_{\Phi\psi} = [(1+\upsilon)/E](\sigma_x \cos^2\Phi + \tau_{xy}\sin 2\Phi + \sigma_y \sin^2\Phi - \sigma_z)\sin^2\Psi + [(1+\upsilon)/E](\tau_{xz}\cos\Phi + \tau_{yz}\sin\Phi)\sin 2\Psi + [(1+\nu)/E]\sigma_z - (\nu/E)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

一般情况下，材料的自由表面应该是平面应力状态，垂直于表面的的应力为零，即 $\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. 所以上式可以改写为

$$\varepsilon_{\Phi\psi} = [(1+\upsilon)/E](\sigma_x \cos^2\Phi + \tau_{xy}\sin 2\Phi + \sigma_y \sin^2\Phi)\sin^2\Psi - (\nu/E)(\sigma_x + \sigma_y)$$

这是材料表面宏观应变$\varepsilon_{\varphi\psi}$与各应力分量及Φ角Ψ角的关系。



$2dSin\theta = n\lambda$
λ
θ
θ
d
2θ
$\delta = 2dSin\theta$

布拉格定律

$$2d\ \mathrm{Sin}\theta = n\lambda \qquad (n=1，2，3……)$$

布拉格定律把宏观上可以测量的衍射角2θ与微观的晶面间距d建立起确定的关系。当材料中有应力σ存在时，其晶面间距d必然随晶面与应力相对取向的不同而有所变化，按照布拉格定律，衍射角2θ也 会相应改变。

对布拉格公式进行微分

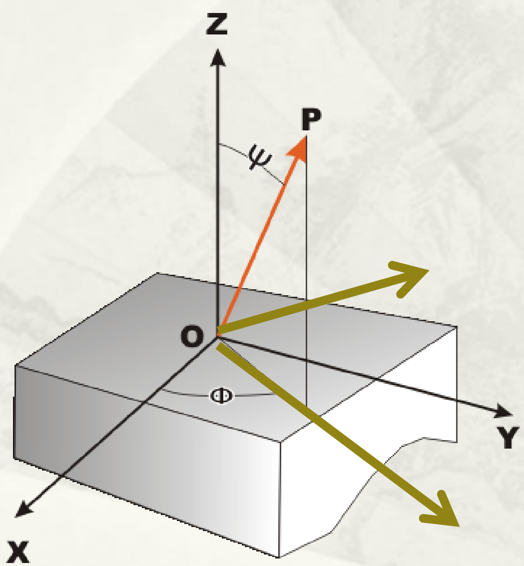
$$\varepsilon_{\Phi\Psi} = \left(d_{\Phi\Psi} - d_0\right)/d_0 = -(1/2)(\pi/180°)\cot\theta_0\left(2\theta_{\Phi\Psi} - 2\theta_0\right)$$

这就是晶面间距相对变化即晶格应变$\varepsilon_{\varphi\psi}$的表达式，它是利用衍射角2θ的相对变化来描述的。

根据Аксенов的晶格应变与宏观应变一致的基本思想，可得

$$\left[(1+\nu)/E\right]\left(\sigma_x\cos^2\Phi+\tau_{xy}\sin 2\Phi+\sigma_y\sin^2\Phi\right)\sin^2\Psi-(\nu/E)\left(\sigma_x+\sigma_y\right)$$
$$=-(1/2)(\pi/180°)\cot\theta_0\left(2\theta_{\Phi\Psi}-2\theta_0\right)$$

可见，等式左端包含应力分量，右端包含衍射分析得到的衍射角2θ。



为了简化计算，我们不妨暂且以OZ为轴，转动X轴和Y轴，使Φ为0 ，简化上式。然后对$\sin^2\Psi$求偏导，整理后可以得出著名的$\sin^2\Psi$法应力公式：

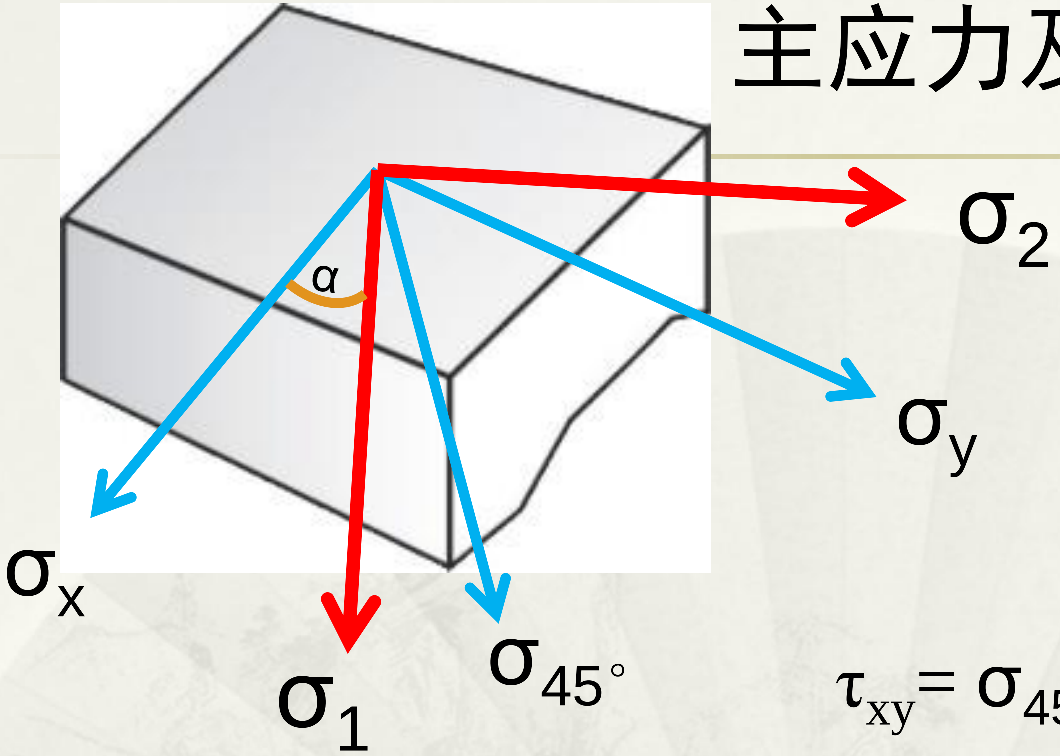
$$\sigma_\Phi=K\frac{\partial 2\theta_\psi}{\partial\sin^2\Psi}$$

式中K为应力常数

$$K=-\frac{E}{2(1+\nu)}\frac{\pi}{180^o}\cot\theta_o$$

至此，我们得到了试样表面指定点（o）指定方向（平径角Φ所确定的方向 ）的应力。

主应力及其方向的测定



$$\tau_{xy} = \sigma_{45^\circ} - (\sigma_x + \sigma_y) / 2$$

$$\sigma_1 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$

$$\sigma_2 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 - \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^{\ 2}}$$

$$\alpha = \arctan[(\sigma_1 - \sigma_x)/\tau_{xy}]$$